**Tw. 15** $(C[0;1])^* \cong \bigoplus_{s\in S} L^1_s[0;1] \oplus l^1(\mathbb{R})$ $\left(= \bigoplus_{s\in S} L^1_s[0;1] \oplus \bigoplus_{t\in T} l^1_t(\mathbb{N})\right)$ gdzie $|S| = |T| = \mathfrak{c}$

Dowód ($\cdot$) Z LKZ istnieje maksymalna rodzina miar $\{\mu_s\}_{s\in S}$ o tej własności że

(i) $\forall_{s\in S}$ $\mu_s$ - probabilistyczna
(ii) $\forall_{s,s'\in S}$ $\mu_s \perp \mu_{s'}$
(iii) $\forall_{t\in[0;1]}$ $\delta_t \in \{\mu_s\}_{s\in S}$

gdy weźmiemy bowiem łańcuch takich rodzin to jego suma też jest taką rodziną

- wiemy że $(C[0;1])^*$ to miary borelowskie na $[0;1]$ zatem są one regularne: wówczas gdy podzielimy $\{\mu_s\}_{s\in S} = \{\delta_t\}_{t\in[0;1]} \cup \{\mu_s\}_{s\in S_0}$ to dla $s\in S_0$ jest że $\mu_s$ jest bezatomowa*. Prawdziwe jest następujące:

(Tw) $\mu$ - borelowska na $[0;1]$, probabilistyczna oraz $\forall_{t\in[0;1]} \mu(\{t\}) = 0$. Wówczas $\mu$ jest transportem miary Lebesgue'a tzn $\exists_{\varphi: ([0;1], \mathcal{B}) \to ([0;1], \mathcal{B})}$ $\varphi$ - borelowski izomorfizm że $\mu \circ \varphi = m$ gdzie $m$ - miara Lebesgue'a.

(Wniosek) $L^1(\mu_s) \cong L^1[0;1]$ ze względu miarą Lebesgue'a // izomorfizm to stosowna zamiana zmiennych $f \mapsto f\circ\varphi^{-1}$)

- sprawdźmy, że dla $\nu \in M(\mathcal{B}[0;1])$ $\exists! \{\nu_\alpha\}_{\alpha\in[0;1]\cup S_0}$
$$\nu = \sum_\alpha \nu_\alpha \quad \text{oraz} \quad \|\nu\| = \sum \|\nu_\alpha\| \quad \text{o} \quad \forall_\alpha\ \nu_\alpha \ll \mu_\alpha$$
Faktycznie mamy $\nu = \nu_\alpha + \nu_\alpha^\perp$ z rozkładu Lebesgue'a gdzie $\nu_\alpha \ll \mu_\alpha$ i $\nu_\alpha^\perp \perp \mu_\alpha$ zatem $\nu_\alpha^\perp = \nu - \nu_\alpha \perp \mu_\alpha$. Słowo $\mu_\alpha \perp \mu_\beta$ dla $\alpha\neq\beta \Rightarrow$ tym bardziej $\nu_\alpha \perp \nu_\beta$ $(\alpha\neq\beta)$. a więc $\|\sum_{n=1}^N \nu_{\alpha_n}\| = \sum_{n=1}^N \|\nu_{\alpha_n}\|$. Twierdzimy że $\sum_{n=1}^N \|\nu_{\alpha_n}\| \leq \|\nu\|$; to wynika z tego że $\nu - \sum_{n=1}^N \nu_{\alpha_n} \perp \nu_\beta$ dla $\beta\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_N\}$ gdy np. $\beta = \alpha_j$ to $\nu - \sum_{n=1}^N \nu_{\alpha_n} = \underbrace{\nu - \nu_{\alpha_j}}_{\perp\mu_{\alpha_j} \text{ a więc tym bardziej do } \nu_{\alpha_j}} + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^N \overset{\perp\mu_{\alpha_j} \text{ więc też do } \nu_{\alpha_j}}{\nu_{\alpha_n}}$; potem prawa „$\perp$" więc oba składniki są $\perp \nu_{\alpha_j}$

Zatem mamy $\sum_\alpha \|\nu_\alpha\| \leq \|\nu\|$ więc tak naprawdę ta suma jest przeliczalna; niech $\nu' := \sum_\alpha \nu_\alpha$ i twierdzimy że $\nu - \nu' \perp \mu_\beta$ $\forall_\beta$: tak bo $\nu - \nu' = \nu - \nu_\beta - \sum_{\alpha\neq\beta} \nu_\alpha$ i znowu $\nu - \nu_\beta \perp \mu_\beta$ oraz $\forall_{\alpha\neq\beta}$ $\nu_\alpha \ll \mu_\alpha \perp \mu_\beta$ $\Rightarrow \forall_{\alpha\neq\beta}$ $\nu_\alpha \perp \mu_\beta \Rightarrow \sum_{\alpha\neq\beta} \nu_\alpha \perp \mu_\beta$ (bo suma przeliczalna tak naprawdę!) a to oznacza, że mamy $\forall_\beta$ $|\nu - \sum_\alpha \nu_\alpha| \perp \mu_\beta$. Jednak rodzina $\{\mu_\beta\}$ jest maksymalna zatem $\nu - \sum \nu_\alpha = 0$ (potrzebujemy $|\ldots|$ bo mówimy o miarach probabilistycznych) - można oczywiście również unormować

Stąd też $\|\nu\| = \sum \|\nu_\alpha\|$

- na odwrót gdy $\nu_\alpha \ll \mu_\alpha$ oraz $\sum \|\nu_\alpha\| < \infty \Rightarrow \nu := \sum_\alpha \nu_\alpha$ ma sens i $\|\nu\| = \sum \|\nu_\alpha\|$ bo gdy $\nu_\alpha \ll \mu_\alpha$ to $\nu_\alpha \perp \nu_\beta$ dla $\alpha\neq\beta$ i $\|\sum \nu_\alpha\| = \sum \|\nu_\alpha\|$

- wobec tego mamy, że $M(\mathcal{B}[0;1]) \ni \nu \mapsto \{\nu_\alpha\} \in \bigoplus_\alpha \{\tilde\nu : \tilde\nu \ll \mu_\alpha\}$ jest izometrią liniową. Jednak każdy składnik tej sumy prostej jest izomorficzny z $L^1(\mu_\alpha)$ poprzez $f \mapsto f\,d\mu_\alpha \in \{\tilde\nu : \tilde\nu \ll \mu_\alpha\}$

- pozostaje sprawdzić że $|S_0| = \mathfrak{c}$: przytoczymy tutaj następujące:

* def. bezatomowej miary: dla $F$: $\mu(F) > 0$ istnieje $E \subset F$ że $0 < \mu(E) < \mu(F)$.

(Tw. Kuratowskiego): Gdy $X$ – pr. Polska, $A \subset X$ jest borelowski oraz $\# A > \aleph_0$ to $A \cong [0,1]$ (izomorfizm borelowski).

Zatem istnieje $\varphi: [0,1] \to [0,1]^2$ izomorfizm borelowski i wtedy $\mu_t$ – miarę Lebesgue'a na $\{t\} \times [0,1]$ $\varphi$ (jednoznacznie!) przenosząc: $\mu_t \perp \mu_{t'}$ $t \neq t'$, $\mu_t$ – bezatomowe oraz probabilistyczne. Zatem możemy przenieść do $[0,1]$ i tam znaleźć taką rodzinę.

Dualna do $L^1(X)$ z miarą $\sigma$-skończoną:

I niech $(X, \Sigma, \mu)$ – pr. z miarą skończoną tzn. $\mu(X) < \infty$. Weźmy $\varphi \in L^1(X)'$

• połóżmy $\lambda: \Sigma \to [0, \infty)$ wzorem $\lambda(A) = \varphi(\chi_A)$. Wówczas mamy

$\lambda(\emptyset) = \varphi(\chi_\emptyset) = \varphi(0) = 0$, gdy $\mu(A) = 0$ to $\chi_A = 0$ więc $\lambda(A) = \varphi(\chi_A) = \varphi(0) = 0$

oraz gdy $(A_n)_{n=1}^\infty$ – ciąg rozłącznych zbiorów to $\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} = \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}$ w $\|\cdot\|_1$ *!

$\| \chi_{\bigcup A_n} - \sum_{n=1}^N \chi_{A_n} \|_1 = \| \chi_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} - \chi_{\bigcup_{n=1}^N A_n} \|_1 = \| \chi_{\bigcup_{n=N+1}^\infty A_n} \|_1 = \mu(\bigcup_{n=N+1}^\infty A_n) = \sum_{n=N+1}^\infty \mu(A_n) \to 0$ bo

szereg $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ jest zbieżny bo $\mu(X) < \infty$.

Zatem $\lambda(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \varphi(\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}) = \varphi(\sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(\chi_{A_n}) = \sum_{n=1}^\infty \lambda(A_n)$

Zatem $\lambda$ – miara abs. ciągła wzg. $\mu$.

• Radon-Nikodym: $\lambda(A) = \int_A g \, d\mu$ dla $g \in L^1$

zatem $\varphi(\chi_A) = \lambda(A) = \int_A g \, d\mu = \int_X g \chi_A \, d\mu \Rightarrow \varphi = \int_X (\cdot) g \, d\mu$ dla funkcji prostych (z liniowości).

Mamy $|\int_X g f \, d\mu| \leq |\varphi(f)| \leq \|\varphi\| \, \|f\|_1$ w szczególności:

$|\int_X g \chi_A \, d\mu| \leq \|\varphi\| \cdot \underbrace{\|\chi_A\|_1}_{= \mu(A)} = \|\varphi\| \, \mu(A) \Rightarrow |\frac{1}{\mu(A)} \int_A g \, d\mu| \leq \|\varphi\|$

• prawdą jest że $\begin{cases} \mu - \sigma\text{-skończona} \\ g: X \to \mathbb{C} \text{ – mierzalna} \\ \text{oraz } \forall_{A \in \Sigma} \left( \mu(A) \in (0, +\infty) \Rightarrow |\frac{1}{\mu(A)} \int_A g \, d\mu| \leq M \right) \end{cases} \Rightarrow |g| \leq M$ p.w.

zatem $|g| \leq \|\varphi\|$ p.w. $\Rightarrow \|g\|_\infty \leq \|\varphi\|$ skąd wiemy już że $g \in L^\infty$

(na odwrót: skoro już wiemy że $\varphi(f) = \int_X g f \, d\mu$ to $\|\varphi(f)\| = |\int_X f g \, d\mu| \leq$

$\leq \int_X |f| |g| \, d\mu \leq \int_X |f| \, \|g\|_\infty \, d\mu = \|g\|_\infty \int_X |f| \, d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1 \Rightarrow \|\varphi\| \leq \|g\|_\infty$ ).

II • $X$ – $\sigma$-skończona: wówczas istnieje $u: X \to (0, +\infty)$ mierzalna, $u \in L^1(X)$

(łatwe ćwiczenie!). Określmy $\nu: \Sigma \to \mathbb{R}_+$ $\nu(A) = \int_A u \, d\mu$: wtedy $\nu$ – miara skończona

* punktowo to jest zawsze, chodzi o zb. w normie!

• ponadto $\int_X f d\nu = \int_X f u d\mu \Rightarrow \underbrace{\int_A 1 d\mu}_{\mu(A)} = \int_A \frac{1}{u} \cdot u d\mu = \int_A \frac{1}{u} d\nu$

z tego ponadto $\|f\|_{L^1(\nu)} = \|fu\|_{L^1(\mu)} = \|f\|_{\frac{1}{u}L^1(\mu)} \Rightarrow$ norma zadana z wagą $\frac{1}{u}$:

• weźmy $\varphi: L^1(\mu) \to \mathbb{C}$ liniowy ciągły i stwórzmy z nim

$\tilde{\varphi}: L^1(\nu) \ni f \mapsto \varphi(uf) \in \mathbb{C}$ wówczas $|\tilde{\varphi}(f)| = |\varphi(uf)| \leq \|\varphi\| \cdot \|uf\|_{L^1(\mu)} = \|\varphi\| \cdot \|f\|_{L^1(\nu)}$

zatem $\tilde{\varphi} \in (L^1(\nu))' \Rightarrow \tilde{\varphi}(f) = \int_X fg d\nu$ dla pewnej $g \in L^\infty(\nu)$.

• ale $L^\infty(\mu) \cong L^\infty(\nu)$ (te same zb. miary 0) i stąd

$\varphi(h) = \tilde{\varphi}(\frac{h}{u}) = \int_X \frac{h}{u} g d\nu = \int_X \frac{h}{u} \cdot g u d\mu = \int_X h g d\mu$

Skoro $\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\|$ (bo podst. rozmiar) to $\|g\|_{L^\infty(\mu)} = \|g\|_{L^\infty(\nu)} = \|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\|$ ☒

Miary, normy, wahanie

Gdy $\mu$ nie jest nieujemna to definiujemy nieujemną miarę

**Def 1** Gdy $\mu$ – miara zespolona / rzeczywista to definiujemy
$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| \quad E_n \in \mathcal{A}, \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = A\}$ rozłączne

$|\mu|$ zwaną wahaniem miary $\mu$ jako

Oczywiście gdy miara $\mu$ (już) jest nieujemna to $\mu = |\mu|$

**Def. 2** Definiujemy $\|\mu\|$ dla zespolonej miary $\mu$ jako $\|\mu\| := |\mu|(X)$.

**Fakt 3** To jest faktycznie norma na przestrzeni zespolonych miar.

**Def. 4** • Nieujemne miary $\mu$ i $\nu$ nazywamy wzajemnie singularnymi gdy istnieją mierzalne $A, B \subseteq X$ takie że $\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = X \end{cases}$ $\mu(A) = \nu(B) = 0$ // tzn. $\mu$ jest skupiona na $B$ zaś $\nu$ na $A$

• Zespolone miary $\mu, \nu$ nazywamy wzajemnie singularnymi gdy $|\mu|$ i $|\nu|$ są wzajemnie singularne. Piszemy (w obu przypadkach) $\mu \perp \nu$.

**Fakt 5** Jeżeli $\mu$ i $\nu$ są zespolone i $\mu \perp \nu$ to $\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$.

**Uwaga 6** Niech $\mu$ będzie skupiona na $A$, $\nu$ na $B$. Wtedy mamy
$\|\mu\| = |\mu|(X) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X\}$ i twierdzimy że to jest równe
$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(F_n)| \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = A\}$ i jeżeli mamy podział $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$
to wtedy $F_n := E_n \cap A$ dostajemy $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = A$ i takie $\underbrace{\mu(E_n \cap A)}_{\mu(F_n)} = \mu(E_n)$
a gdy mamy podział $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = A$ to nie ma znaczenia jak dobierzemy dalsze zbiory (np.) $G_n$ żeby $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = X \setminus A$ bo i tak jest wtedy $\mu(G_n) = 0$ więc to są te same sumy.

dowód dla 5 Mamy teraz $\|\mu + \nu\| = |\mu + \nu|(X) = |\mu + \nu|(A \cup B) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |(\mu + \nu)(E_n)| \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = A \cup B$

$= \sup\{\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_k)+\nu(E_k)| \;:\; \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = A\cup B\}$ i mówo rozkład $A\cup B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ mamy realizować równoważnie jako rozkłady $A=\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ i $B=\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ i wtedy mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(F_k) + \underbrace{\mu(G_k)}_{=0} + \underbrace{\nu(F_k)}_{=0} + \nu(G_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(F_k)+\nu(G_k)|$$ i to będzie $\le \sum_{k=1}^{\infty}(|\mu(F_k)|+|\nu(G_k)|)$

a więc $|\mu+\nu|\le|\mu|+|\nu|$ (de facto dla dowolnego zbioru: więc w szczególności dla $X$ a więc $\|\mu+\nu\|\le\|\mu\|+\|\nu\|$ co oczywiście jest jasne jak wiemy, że to jest norma)

• Na odwrót: weźmy mierzalny $E$ i ust. $\varepsilon>0$: znajdziemy wówczas rozkłady $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ że $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = E$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = E$ i $|\mu|(E)\le\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}|\mu(A_k)|$ i $|\nu|(E)\le\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}|\nu(B_k)|$

no ale skoro $\mu$ jest skupiona na $A$ a $\nu$ na $B$ to mamy kolejno:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\mu(A_k)| = \sum_{k=1}^{\infty}|\mu(A_k\cap A)| = \sum_{k=1}^{\infty}|\mu(A_k\cap A)+\underbrace{\nu(A_k\cap A)}_{=0}| = \sum_{k=1}^{\infty}|(\mu+\nu)(A_k\cap A)|$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\nu(B_k)| = \sum_{k=1}^{\infty}|\nu(B_k\cap B)| = \sum_{k=1}^{\infty}|\underbrace{\mu(B_k\cap B)}_{=0}+\nu(B_k\cap B)| = \sum_{k=1}^{\infty}|(\mu+\nu)(B_k\cap B)|$$

zatem $(|\mu|+|\nu|)(E)\le\varepsilon+\sum_{k=1}^{\infty}(|\mu(A_k)|+|\nu(B_k)|) = \varepsilon+\sum_{k=1}^{\infty}(|(\mu+\nu)(A_k\cap A)|+|(\mu+\nu)(B_k\cap B)|)$

no i oczywiście $\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap A)\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k\cap B) = (E\cap A)\cup(E\cap B) = E\cap(A\cup B) = E$.

zatem $(|\mu|+|\nu|)(E)\le\varepsilon+\sum_{k=1}^{\infty}(|(\mu+\nu)(A_k\cap A)|+|(\mu+\nu)(B_k\cap B)|)\le\varepsilon+|\mu+\nu|(E)$ i z dowolności $\varepsilon>0$ mamy tezę ⊠

Będziemy używać następującego rezultatu: jeżeli $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_N$ są parami singularne i ponadto $\nu-\sum_{n=1}^{N}\nu_n\perp\nu_k$ dla $k=1,2,\dots,N$ to wtedy $\|\sum_{n=1}^{N}\nu_n\|\le\|\nu\|$.

__Dowód__. $\|\nu\| = |\nu|(X) = \sup\{\sum_{k=1}^{\infty}|\nu(E_k)| \;:\; \bigcup_{k=1}^{\infty}E_k = X,\ E_k \text{ - mierzalne}\} =$

$= \dots$ niech $A_1, A_2, \dots, A_N$ – „nośniki" dla $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_N$ itd ... $=$

$B$ – „nośnik" dla $\nu-\sum_{n=1}^{N}\nu_n$

$$= \sup\{\sum_{k=1}^{\infty}(|\nu(E_k)|+|\nu(F_k)|) \;:\; \bigcup_{k=1}^{\infty}E_k = \bigcup_{n=1}^{N}A_n,\ \bigcup_{k=1}^{\infty}F_k = B\} =$$

$$= \sup\{\sum_{k=1}^{\infty}|\sum_{n=1}^{N}\nu_n(E_k) + \underbrace{(\nu-\sum_{n=1}^{N}\nu_n)(E_k)}_{=0}| + |\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\nu_n(F_k)}_{=0} + (\nu-\sum_{n=1}^{N}\nu_n)(F_k)| \;:\; \bigcup_{k=1}^{\infty}E_k = \bigcup_{n=1}^{N}A_n,\ \bigcup_{k=1}^{\infty}F_k = B\} =$$

$$= \sup\{\sum_{k=1}^{\infty}|\sum_{n=1}^{N}\nu_n(E_k)| + |(\nu-\sum_{n=1}^{N}\nu_n)(F_k)| \;:\; \bigcup_{k=1}^{\infty}E_k = \bigcup_{n=1}^{N}A_n,\ \bigcup_{k=1}^{\infty}F_k = B\} \ge$$

$$\ge \sup\{\sum_{k=1}^{\infty}|\sum_{n=1}^{N}\nu_n(E_k)| \;:\; \bigcup_{k=1}^{\infty}E_k = \bigcup_{n=1}^{N}A_n\} = |\sum_{n=1}^{N}\nu_n|(\bigcup_{n=1}^{N}A_n) = |\sum_{n=1}^{N}\nu_n|(X) = \|\sum_{n=1}^{N}\nu_n\| = \sum_{n=1}^{N}\|\nu_n\|$$ ⊠